# લિબર્ટી પેપરસેટ

## ધોરણ 12 : ગણિત

**Full Solution**

સમય : 3 કલાક | અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 8

## PART A

**1.** (D) **2.** (C) **3.** (C) **4.** (C) **5.** (D) **6.** (A) **7.** (B) **8.** (C) **9.** (C) **10.** (A) **11.** (D) **12.** (B) **13.** (C) **14.** (A) **15.** (B) **16.** (D) **17.** (B) **18.** (C) **19.** (A) **20.** (C) **21.** (D) **22.** (D) **23.** (C) **24.** (B) **25.** (A) **26.** (B) **27.** (B) **28.** (D) **29.** (A) **30.** (C) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (C) **34.** (B) **35.** (A) **36.** (C) **37.** (B) **38.** (B) **39.** (B) **40.** (D) **41.** (A) **42.** (D) **43.** (B) **44.** (C) **45.** (D) **46.** (A) **47.** (D) **48.** (C) **49.** (B) **50.** (B)

## PART B

### વિભાગ-A

**1.**

જ.બા. $= \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$x = \sin\theta$ લેતાં,

$\therefore \ \theta = \sin^{-1}x, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ જ.બા. $= \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$

હવે $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

$\therefore \ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \le \sin\theta \le \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \ -\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ ($\because \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ પર $\sin$ વધતું વિધેય છે.)

$\therefore \ -\frac{\pi}{2} \le 3\theta \le \frac{\pi}{2}$

$3\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ....... (1)

$\therefore$ જ.બા. $= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$

$= 3\theta$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$= 3 \cdot \sin^{-1}x$

= ડા.બા.

**2.**

$\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\right]$

$x = \tan\theta$ અને $y = \tan\phi$ ધારો $\theta, \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$= \tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}\right)\right]$

$= \tan\frac{1}{2}[\sin^{-1}(\sin 2\theta) + \cos^{-1}(\cos 2\phi)]$

હવે $|x| < 1$

$\therefore \ -1 < x < 1$

$\therefore \ -\tan\frac{\pi}{4} \ \tan\theta < \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \tan\theta < \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \ -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \ -\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \ 2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \ y > 0, xy < 1$

$\therefore \ 0 < y < 1$

$\therefore \ \tan 0 < \tan\phi < \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \ 0 < \phi < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \ 0 < 2\phi < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \ 2\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset [0, \pi]$

$= \tan\frac{1}{2}[2\theta + 2\phi]$

$= \tan(\theta + \phi)$

$= \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \cdot \tan\phi}$

$= \frac{x + y}{1 - x \cdot y}$

**3.**

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sin^{-1}(\sin x) = x$

આથી, $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$ થાય તેવી અપેક્ષા રાખી શકાય. પરંતુ, $\sin^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$માં $\frac{3\pi}{5}$ નથી.

$$sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= sin\frac{2\pi}{5} \text{ અને } \frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

આથી, $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$

$$= sin\left(sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

**4.**

**રીત 1 :**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{sin\,x - cos\,x}{1 + sin\,x \cdot cos\,x}\right] dx$$

ગુણધર્મ (6) મુજબ, $x = \frac{\pi}{2} - x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\,x - sin\,x}{1 + cos\,x\,sin\,x} dx$$

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\,x - cos\,x}{1 + sin\,x\,cos\,x} dx$$

$I = -I$

$\therefore$ $2I = 0$

$\therefore$ $I = 0$

**રીત 2 :**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\,x - cos\,x}{1 + sin\,x\,cos\,x} dx$$

$-\,sin\,x - cos\,x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore$ $(sin\,x - cos\,x)\,dx = dt$

હવે, $-\,(sin\,x + cos\,x) = t$

$\cdot$ $(sin\,x + cos\,x)^2 = t^2$

$\therefore$ $sin^2x + 2\,sin\,x\,cos\,x + cos^2x = t^2$

$\therefore$ $2\,sin\,x\,cos\,x = t^2 - 1$

$\therefore$ $sin\,x \cdot cos\,x = \frac{t^2 - 1}{2}$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = -1$

$x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = -1$

$$I = \int_{-1}^{-1} \frac{dt}{1 + \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)}$$

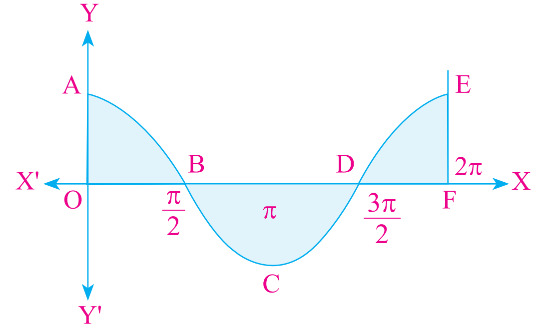
$I = 0$

**5.**

આકૃતિ પરથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ OABOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BCDBનું ક્ષેત્રફળ

+ પ્રદેશ DEFDનું ક્ષેત્રફળ




$\therefore$ માંગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosx\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cosx\,dx$$

$$= (sin\,x)_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|(sin\,x)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + (sin\,x)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left(sin\frac{\pi}{2} - sin\,0\right) + \left|sin\frac{3\neq}{2} - sin\frac{\neq}{2}\right| + sin\,2\pi$$

$$- sin\frac{3\pi}{2}$$

$= (1 - 0) + |-1 - 1| + 0 - (-1)$

$= 1 + 2 + 1$

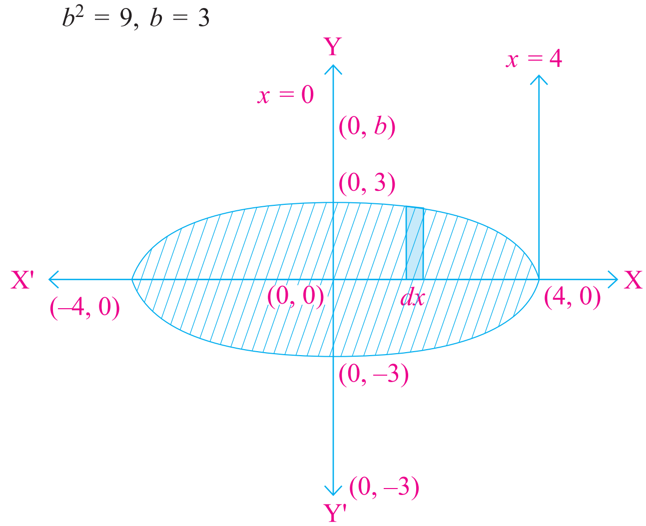
= 4 ચોરસ એકમ

**6.**

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16$, $a = 4$ $(a > b)$

$b^2 = 9$, $b = 3$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ

વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ A = 4|I|

$$I = \int_0^4 y\ dx$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore\ y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

$$I = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{2}(0) + 8\sin^{-1}(1)\right) - \left(0 + \sin^{-1}(0)\right)\right]$$

$$I = \frac{3}{4}\left(8 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$I = 3\pi$

હવે, A = 4|I|

= 4|3π|

$\therefore$ A = 12π ચોરસ એકમ

**7.**

$y \log y\ dx - x\ dy = 0$

$\therefore\ x\ dy = y \log y\ dx$

$$\therefore\ \frac{dy}{y \log y} = \frac{dx}{x}$$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\therefore\ \int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore\ \int \frac{\frac{1}{y}\,dy}{\log y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore\ \int \frac{\frac{d}{dy}(\log y)}{\log y}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$\therefore\ \log|\log(y)| = \log|x| + \log|c|$

$\therefore\ \log|\log y| = \log|x \cdot c|$

$\therefore\ \log y = x \cdot c$

$\therefore\ y = e^{xc};$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

**8.**

ધારો કે સદિશ $\vec{a}$ એ OX સાથે α માપનો,

OY સાથે β માપનો અને

OZ સાથે γ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$\therefore$ α = β = γ

અહીં, $\vec{a}$ ની દિક્કોસાઇન $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ છે.

$\therefore\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\therefore\ 3\cos^2\alpha = 1$

$$\therefore\ \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\vec{a}$ ની દિક્કોસાઇન = $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ છે.

**9.**

A અને B ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર

1 – 2, –2 – 3, 3 + 4 અર્થાત્ –1, –5, 7 છે.

B અને C ને જોડતી રેખાના દિક્ગુણોત્તર

3 – 1, 8 + 2, –11 – 3 અર્થાત્ 2, 10, –14 છે.

સ્પષ્ટ છે કે,

AB અને BC ના દિક્ગુણોત્તર સમપ્રમાણમાં છે.

આથી, AB એ BC ને સમાંતર અથવા સંપાતી છે; પરંતુ AB અને BC બંનેમાં B સામાન્ય બિંદુ છે.

તેથી A, B, C સમરેખ છે.

**10.**

અહીં, રેખાના દિક્ગુણોત્તર,

$a = -18$, $b = 12$, $c = -4$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{324 + 144 + 16} = \sqrt{484} = 22$$

રેખાની દિક્કોસાઇન $l, m, n$ હોય તો,

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{-18}{22}, \frac{12}{22}, \frac{-4}{22}$$

$$= \frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$$

**11.**

પાસાને ત્રણ વખત ફેંકતા કુલ શક્ય પરિણામો

$n = 216$

ઓછામાં ઓછી એક વખત અયુગ્મ સંખ્યા મળે તેની સંભાવના,

ઘટના A : ત્રણેય પાસા ઉછાળતા ઓછામાં ઓછી એક વખત અયુગ્મ સંખ્યા મળે.

A' = ત્રણેય પાસા પર મળતી સંખ્યા યુગ્મ હોય.

$\therefore\ r = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$$\therefore\ P(A') = \frac{r}{n} = \frac{27}{216}$$

∴ ત્રણેય પાસા પર મળતી સંખ્યા અયુગ્મ હોય

તેની સંભાવના $P(A) = 1 - P(A')$

$= 1 - \frac{27}{216}$

$= \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$

**12.**

એક માર્ગદર્શક પાસે પ્રશ્નબેંક છે. તેમાં સત્ય/અસત્ય પ્રકારના 300 સરળ તથા 200 કઠિન પ્રશ્નો છે. બહુવિકલ્પી પ્રકારના 500 સરળ તથા 400 કઠિન પ્રશ્નો છે.

સત્ય/અસત્ય પ્રકારના પ્રશ્નો = 500

બહુવિકલ્પ પ્રકારના પ્રશ્નો = 900

∴ $n = 1400$

| પ્રશ્નો | સરળ | કઠિન | કુલ |
|---|---|---|---|
| સત્ય/અસત્ય પ્રકારના પ્રશ્નો | 300 | 200 | 500 |
| બહુવિકલ્પી પ્રકારના પ્રશ્નો | 500 | 400 | 900 |
| | 800 | 600 | 1400 |

ઘટના A : પ્રશ્ન પસંદ કરતાં બહુવિકલ્પ પ્રકારનો પ્રશ્ન છે.

A = બહુવિકલ્પ પ્રકારના કુલ 900 પ્રશ્નો છે.

∴ $r = 900$

∴ $P(A) = \frac{900}{1400}$

$= \frac{9}{14}$

ઘટના B : પ્રશ્ન પસંદ કરતાં તે સરળ પ્રશ્ન હોય

B = સત્ય/અસત્ય પ્રકારના સરળ 300 અને બહુવિકલ્પ પ્રકારના સરળ 500 પ્રશ્નો છે.

∴ $r = 300 + 500$

$= 800$

∴ $P(B) = \frac{800}{1400}$

$= \frac{8}{14}$

$A \cap B$ = બહુવિકલ્પ પ્રકારના સરળ પ્રશ્નો

∴ $r = 500$

∴ $P(A \cap B) = \frac{500}{1400}$

$= \frac{5}{14}$

∴ શરતી સંભાવના $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{5}{14}}{\frac{9}{14}}$

$= \frac{5}{9}$

## વિભાગ-B

**13.**

અહીં $S = \{(a, b) : a \le b^2\}$

ધારો કે, $(a, a) \in S$, $\forall a \in R$

∴ $a \le a^2$ જે શક્ય નથી.

∴ ધારણા ખોટી છે.

∴ $(a, a) \notin S$

∴ S એ સ્વવાચક નથી.

**ઉદાહરણ :** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ માટે $\frac{1}{3} \le \frac{1}{9}$ જે શક્ય નથી.

∴ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \notin S$

ધારો કે, $(2, 5) \in S$ પરંતુ $(5, 2) \notin S$

∴ $(5, 2)$ માટે $5 \le 4$ જે શક્ય નથી.

∴ S એ સંમિત નથી.

ધારો કે, $(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S$

∴ $a \le b^2$ તથા $b \le c^2$

∴ $b^2 \le c^4$

∴ $a \le b^2 \le c^4$

∴ $a \le c^4$

∴ $(a, c) \notin S$

∴ S એ પરંપરિત નથી.

આમ, સંબંધ S એ સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી, પરંપરિત નથી.

**14.**

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

∴ $A^2 = A \cdot A$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

હવે, $A^2 - 5A + 7I$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= O$

**15.**

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{vmatrix}$$

$= (67)(61) - (87)(47)$

$= 4087 - 4089$

$= -2 \neq 0$

$\therefore$ $(AB)^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

આથી, $adj\ (AB) = \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\ adj\ AB$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$\rightarrow$ $A^{-1}$ મેળવવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 15 - 14$

$= 1 \neq 0$

$A^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 54 - 56$

$= -2 \neq 0$

$B^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$$adj\ B = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\ adj\ B$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\ A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

પરિણામ 1 અને 2 પરથી, $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

**16.**

ધારો કે, $u = (logx)^x$ અને $v = x^{logx}$

$\therefore$ $y = u + v$

હવે, બંને બાજુ $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

અહીં, $u = (logx)^x$ ની

બંને બાજુ $log$ લેતાં,

$log\ u = x\ log(logx)$

હવે, બંને બાજુ $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\ log(logx) + log(logx)\ \frac{d}{dx}\ x$$

$$= x \times \frac{1}{xlogx} + log(logx)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u\left[\frac{1}{log\,x} + log(logx)\right]$$

$$\frac{du}{dx} = (logx)^x\left[\frac{1}{log\,x} + log(logx)\right] \quad \ldots\ldots (2)$$

હવે, $v = x^{logx}$ ની

બંને બાજુ $log$ લેતાં,

$log\ v = log\ x \cdot log\ x$

હવે, બંને બાજુ $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = logx\ \frac{d}{dx}\ logx + logx \cdot \frac{d}{dx}\ log\ x$$

$$= logx \times \frac{1}{x} + log\ x \times \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{2logx}{x}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{2logx}{x}\right]$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = x^{logx}\left[\frac{2logx}{x}\right] \quad \ldots\ldots (3)$$

પરિણામ (2) અને (3) ની કિંમત પરિણામ 1 માં મૂકતાં,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (logx)^x\left[\frac{1}{logx} + log(logx)\right] + x^{logx}\left[\frac{2logx}{x}\right]$$

$$= (logx)^{x-1} + (logx)^x \cdot log(logx) + x^{logx-1}\,[2log\,x]$$

$$\frac{dy}{dx} = (logx)^{x-1}[1 + logx \cdot log(logx)] + 2x^{log\,x-1}(logx)$$

**17.**

$$f(x) = \frac{log\,x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - log\,x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - log\,x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2\left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - log\,x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x - (2x - 2x\,log\,x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x - 2x + 2x\,log\,x}{x^4}$$

$$= \frac{2x\,log\,x - 3x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2\,log\,x - 3}{x^3}$$

→ મહત્તમ મૂલ્ય મેળવવા માટે,

$$f'(x) = 0$$

$$\therefore \frac{1 - log\,x}{x^2} = 0$$

$$\therefore 1 - log\,x = 0$$

$$\therefore log\,x = 1$$

$$\therefore x = e$$

$$f''(e) = \frac{2\,log_e e - 3}{e^3}$$

$$\therefore f''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$$

∴ $f$ને $x = e$ આગળ મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

**18.**

P નો સ્થાન સદિશ $= 2\vec{a} + \vec{b}$

Q નો સ્થાન સદિશ $= \vec{a} - 3\vec{b}$

R એ $\overline{PQ}$ નું P તરફથી 1 : 2 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરે છે.

R નો સ્થાન સદિશ

$$= \frac{\lambda(\text{Q નો સ્થાન સદિશ}) + \text{P નો સ્થાન સદિશ}}{\lambda + 1}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2}(\vec{a} - 3\vec{b}) + (2\vec{a} + \vec{b})}{\frac{-1}{2} + 1}$$

$$= \frac{-\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{a} + 2\vec{b}}{1}$$

R નો સ્થાન સદિશ $= 3\vec{a} + 5\vec{b}$

$\overline{RQ}$ નું મધ્યબિંદુ

$$= \frac{\text{R નો સ્થાન સદિશ} + \text{Q નો સ્થાન સદિશ}}{2}$$

$$= \frac{3\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{a} - 3\vec{b}}{2}$$

$$= 2\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OP}$$

= P નો સ્થાન સદિશ

∴ P એ રેખાખંડ $\overline{RQ}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

**19.**

$L : \vec{r} = (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$M : (\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$\therefore \vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$; તથા

$\vec{b_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

અને $\vec{a_2} = -4\hat{i} - \hat{k}$; તથા $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b_1} \times \vec{b_2} \neq \vec{0}$

∴ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય છે.

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{64 + 64 + 16}$

$= \sqrt{144}$

$= 12$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (-4\hat{i} - \hat{k}) - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})$

$= (-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$

$= -80 - 16 - 12$

$= -108$

$\neq 0$

∴ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{\left|(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})\right|}{\left|\vec{b_1} \times \vec{b_2}\right|}$$

$$= \frac{|-108|}{12}$$

$= \dfrac{108}{12}$

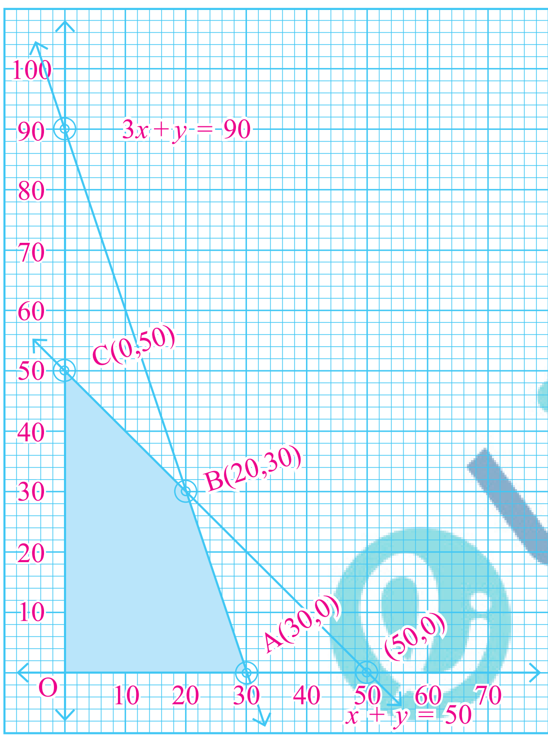
= 9 એકમ

**20.**

➪ મર્યાદા સંહતિ (2) થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ આકૃતિમાં રંગીન કરેલ છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ OABC સીમિત છે. આથી આપણે શિરોબિંદુની રીતથી Zનું મહત્તમ મૂલ્ય શોધીશું.

➪ શિરોબિંદુઓ O, A, B અને Cના યામ અનુક્રમે (0, 0), (30, 0), (20, 30), અને (0, 50), છે. હવે, આપણે આ દરેક બિંદુ આગળ Zની કિંમત મેળવીએ.

| શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ | $Z = 4x + y$ નું સંગત મૂલ્ય |
|---|---|
| (0, 0) | 0 |
| (30, 0) | 120 → મહત્તમ |
| (20, 30) | 110 |
| (0, 50) | 50 |




આમ, બિંદુ (0, 0) આગળ Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 120 મળે છે.

**21.**

➪ ઘટના $E_1$ : વીમા કંપનીએ સ્કૂટરચાલકનો વીમો ઉતાર્યો

ઘટના $E_2$ : કારચાલકનો વીમો ઉતાર્યો

ઘટના $E_3$ : ટ્રક-ચાલકનો વીમો ઉતાર્યો.

કુલ $= 2000 + 4000 + 6000$

$= 12000$

$\therefore P(E_1) = \dfrac{2000}{12000} = \dfrac{1}{6}$

$\therefore P(E_2) = \dfrac{4000}{12000} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore P(E_3) = \dfrac{6000}{12000} = \dfrac{1}{2}$

ઘટના A : વીમાધારકો પૈકી તેમને અકસ્માત થાય.

$P(A \mid E_1) = \dfrac{1}{100}$,

$P(A \mid E_2) = 0.03 = \dfrac{3}{100}$,

$P(A \mid E_3) = 0.15 = \dfrac{15}{100}$

અકસ્માત થાય અને તે સ્કૂટરચાલક હોય.

$$\therefore P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{P(A)}$$

$$\therefore P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2) + P(E_3) \cdot P(A \mid E_3)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{100}$$

$$= \frac{1}{600} + \frac{1}{100} + \frac{15}{200}$$

$$= \frac{1 + 6 + 45}{600}$$

$$= \frac{52}{600}$$

$$\therefore P(E_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{100}}{\frac{52}{600}}$$

$$= \frac{1}{52}$$

## વિભાગ-C

**22.**

➪ અહીં, $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore F(x) \cdot F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y + 0 & -\cos x \sin y - \sin x \cos y + 0 & 0+0+0 \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y + 0 & -\sin x \sin y + \cos x \cos y + 0 & 0+0+0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= F(x + y)$

આમ, $F(x) \cdot F(y) = F(x + y)$

**23.**

$$|A| = 1(15-1) + 2(-10-1) + 1(-2-3)$$
$$= 14 - 22 - 5$$
$$= -13$$

➪ *adj* A મેળવવા માટે,

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(15-1)$

$= 14$

$-2$ નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-10-1)$

$= 11$

1 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-2-3)$

$= -5$

$-2$ નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-10-1)$

$= 11$

3 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(5-1)$

$= 4$

1 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(1+2)$

$= -3$

1 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-2-3)$

$= -5$

1 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(1+2)$

$= -3$

5 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(3-4)$

$= -1$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|adj\ A| = \begin{vmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)$$
$$= 14(-13) - 11(-26) - 5(-13)$$
$$= -182 + 286 + 65$$
$$= 169 \neq 0$$

$\therefore$ $(adj\ A)^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

$$\therefore (adj\ A)^{-1} = \frac{1}{|adj\ A|}\ adj\ (adj\ A)$$

$$\therefore adj(adj\ A) = |A|^{n-2} A$$
$$= |A|\ A$$
$$= [-13]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(adj\ A)^{-1} = \frac{1}{169}\ (-13)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(adj\ A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$
$$= \frac{-1}{13}\ adj\ A$$
$$= \frac{-1}{13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-14}{13} & \frac{-11}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-11}{13} & \frac{-4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

*adj* $(A^{-1})$ મેળવવા માટે,

$-\frac{14}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}$

$= (-1)^2 \left(\frac{-4}{169} - \frac{9}{169}\right)$

$= \frac{-1}{13}$

$-\frac{11}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\frac{11}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}$

$= (-1)\left(\frac{-11}{169} - \frac{15}{169}\right)$

$= \frac{26}{169} = \frac{2}{13}$

$\frac{5}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \end{vmatrix}$

$= 1\left(\frac{-33}{169} + \frac{20}{169}\right)$

$$= \frac{-13}{169} = \frac{-1}{13}$$

$-\frac{11}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}$

$$= (-1)\left(\frac{-11}{169} - \frac{15}{169}\right)$$

$$= \frac{26}{169} = \frac{2}{13}$$

$-\frac{4}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \end{vmatrix}$

$$= 1\left(\frac{-14}{169} - \frac{25}{169}\right)$$

$$= \frac{-39}{169} = \frac{-3}{13}$$

$\frac{3}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \end{vmatrix}$

$$= (-1)\left(\frac{-42}{169} + \frac{55}{169}\right)$$

$$= \frac{-13}{169} = \frac{-1}{13}$$

$\frac{5}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \end{vmatrix}$

$$= 1\left(\frac{-33}{169} + \frac{20}{169}\right)$$

$$= \frac{-13}{169} = \frac{-1}{13}$$

$\frac{3}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & \frac{3}{13} \end{vmatrix}$

$$= -1\left(\frac{-42}{169} + \frac{55}{169}\right)$$

$$= \frac{-13}{169} = \frac{-1}{13}$$

$\frac{1}{13}$ નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} \end{vmatrix}$

$$= 1\left(\frac{56}{169} - \frac{121}{169}\right)$$

$$= \frac{-65}{169} = \frac{-5}{13}$$

$$adj\ (A^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

પરિણામ (1) અને (2) પરથી, $(adj\ A)^{-1} = adj\ (A^{-1})$

**24.**

➪ ધારો કે, $x = tan\ \theta$,

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}x\ ,\ \theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ y = tan^{-1}\left(\frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1 - 3tan^2\theta}\right)$

$= tan^{-1}\ (tan3\theta)$

$\rightarrow$ અહીં, $\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) < tan\theta < tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \frac{-\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad \frac{-\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}$

$3\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots (1)$

$\therefore\ y = tan^{-1}\ (tan3\theta)$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$= 3\theta$

$\therefore\ y = 3tan^{-1}x$

$x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 3\ \frac{d}{dx}\ tan^{-1}x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

**25.**

➪ અહીં, $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

$= 6(x - 2)\ (x - 3)$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં, $x = 2$ અથવા $x = 3$ મળે.

$f''(x) = 12x - 30$

હવે, આપણે $x$ ની આ કિંમતો આગળ વિધેય $f$ નાં મૂલ્યો મેળવીશું. તદુપરાંત (1, 5) નાં અંત્યબિંદુઓ આગળ પણ વિધેય $f$ નાં મૂલ્યો મેળવીશે.

એટલે કે $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ તથા $x = 5$ આગળ વિધેયનાં મૂલ્યો મેળવીશું. આથી,

$f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) + 1 = 24$

$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) + 1 = 29$

$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) + 1 = 28$

$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) + 1 = 56$

આથી, આપણે કહી શકીએ વિધેય $f$ ને $x \in (1, 5)$ માં $x = 5$ આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ મૂલ્ય 56 છે અને $x = 1$ આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય 24 છે.

**26.**

$$\int \sqrt[3]{tan\, x}\ dx$$

$tan\ x = t^3$ લેતાં,

$\therefore\ sec^2x\ dx = 3t^2\ dt$

$$\therefore\ dx = \frac{3t^2\, dt}{1+t^6}$$

$$= \int \frac{3t^2 \cdot t}{1+t^6}\ dt$$

$$= \int \frac{3t^2 \cdot t\ dt}{(t^2+1)(t^6-t^2+1)}$$

હવે, $t^2 = u$ લેતાં,

$2t\ dt = du$

$$\therefore\ t\ dt = \frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{3u\frac{du}{2}}{(u+1)(u^2-u-1)}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{u\ du}{(u+1)(u^2-u+1)}$$

$$\frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1}$$

$\therefore\ u = A(u^2 - u + 1) + (Bu + C)\ (u + 1)$

$\rightarrow$ $u = -1$ લેતાં,

$-1 = 5A(1 + 1 + 1)$

$$A = \frac{-1}{3}$$

$\rightarrow$ $u = 0$ લેતાં,

$0 = A + C$

$$C = -A = \frac{1}{3}$$

$\rightarrow$ $u = 1$ લેતાં,

$1 = A + 2B + 2C$

$$1 = \frac{-1}{3} + 2B + \frac{2}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} + 2B$$

$$\therefore\ \frac{2}{3} = 2B$$

$$\therefore\ B = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)}\ dx$$

$$= \frac{3}{2}\int\left(\frac{\frac{-1}{3}}{u+1} + \frac{\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}}{u^2-u+1}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u+1}\ du + \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{u^2-u+1}\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u+1}\ du + \frac{1}{4}\int \frac{2u+2}{u^2-u+1}\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u+1}\ du + \frac{1}{4}\int \frac{(2u-1)+3}{u^2-u+1}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1} + \frac{1}{4}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\ du + \frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2-u+1}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\ du + \frac{1}{4}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\ du + \frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2-u+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\ du + \frac{1}{4}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\ dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\ log\ |u + 1| + \frac{1}{4}\ log\ |u^2 - u + 1| + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ tan^{-1}\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ log\ |t^2 + 1| + \frac{1}{4}\ log\ |t^4 - t^2 + 1| + \frac{\sqrt{3}}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ log\ \left((tan\ x)^{\frac{2}{3}}+1\right) + \frac{1}{4}\ log\ \left|(tan\ x)^{\frac{4}{3}}-(tan\ x)^{\frac{2}{3}}+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{2(tan\ x)^{\frac{2}{3}}-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

**27.**

$$\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\ y\ dx = \left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\ x\ dy$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \frac{y}{x}$$

$$\therefore\ F(x, y) = \frac{\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \frac{y}{x}$$

$x = \lambda x,\ y = \lambda y$ લેતાં,

$$\therefore\ F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\left\{\lambda\, x\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)+\lambda y\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)\right\}}{\left\{\lambda y\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)-\lambda x\cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)\right\}}\ \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\lambda\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \frac{y}{x}$$

$\therefore\ F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0\ F(x, y)$

જે શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ એ સમપરિમાણીય વિકલ

સમીકરણ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}} \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} \frac{\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left\{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}} \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

હવે, $\frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં,

$\therefore \; y = vx$

$\rightarrow$ $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$\rightarrow$ આ કિંમતો પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v \cos v + v^2 \sin v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v \cos v + v^2 \sin v}{v \sin v - \cos v} - v$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v \cos v + v^2 \sin v - v^2 \sin v + v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v}\right) dv = 2\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \left(\tan v - \frac{1}{v}\right) dv = 2\frac{dx}{x}$$

$\rightarrow$ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\therefore \quad \int \tan v \, dv - \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|c'|$$

$$\therefore \quad \log\left|\frac{sev\ v}{v}\right| = \log|x^2 c'|$$

$$\therefore \quad \frac{\sec v}{v} = x^2 c'$$

$$\therefore \quad \sec v = x^2\, v \cdot c'$$

$\therefore \; v = \frac{y}{x}$ પરત મૂકતાં,

$$\therefore \quad \sec \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x}\, x^2\, c'$$

$$\therefore \quad \sec \frac{y}{x} = xy\, c'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{c'} = \frac{xy}{\sec \frac{y}{x}}$$

$\therefore \; c = xy \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ જ્યાં, $c = \frac{1}{c'}$;

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.